Equations différentielles.

① Définition :

f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose : $y = f(x)$
on a : $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$.

Dans ce cours les nombres a et b sont toujours des réels.

Déf : L'équation :

$$(E) : y'' + ay' + by = g(x)$$

est une équation différentielle de second degré

y est la fonction inconnue.

Expl :
1) $y'' + 3y' - y = 0$
2) $y'' + y = x^2 + 1$
3) $y' - y = \sin(x)$

② Equation de type : $y' + ay = 0$

Les solutions de l'éq $y' + ay = 0$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{-ax} \quad (\text{avec} : \lambda \in \mathbb{R})$$

Ex.1 Résoudre les éq-diff :

1) $y' + 3y = 0$
2) $y' - \sqrt{2}\,y = 0$
3) $y' + \frac{5}{4}y = 0$

③ Eq de type : $y'' + ay' + by = 0$

On considère l'éq-diff :

$$(E) : y'' + ay' + by = 0$$

et son équation caractéristique :

$$(*) \quad r^2 + ar + b = 0$$

1er cas si $(*)$ admet deux solution réels r_1 et r_2 alors :
les solutions de (E) sont les fonctions : $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$

avec : $(\lambda ; \mu \in \mathbb{R})$

λ = "lambda" et μ = "mu"

2ème cas si $(*)$ admet une seule solution réel : r alors :
les solutions de l'éq-diff (E) sont les fonctions : $x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{rx}$

avec $\lambda ; \mu \in \mathbb{R}$.

3ème cas : si $(*)$ admet deux solutions complexes z_1 et z_2

on a : $z_1 = a - bi$; $z_2 = a + bi$

les solutions de (E) sont les fonctions :

$$x \mapsto e^{ax}\left(\lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx)\right)$$

(avec : $\lambda ; \mu \in \mathbb{R}$)

Ex : 2 Résoudre les éq-diff :

1°/ $y'' + 3y' + 2y = 0$
2°/ $y'' - 2y' + y = 0$
3°/ $y'' - 2y' + 5y = 0$

Exercices de révisions :

Ex. 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les éq :

① $e^{3x} - 1 = 0$ ② $e^{5x-1} - e^{x^2+5} = 0$

③ $\ln(e^x - 1) = 1$ ④ $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{3}$

EX. 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

① $3 - e^{-x} > 0$ ② $\dfrac{e^x - 3}{e^x - 1} < 0$

③ $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0$

④ $e^{-2x} + 3e^{-x} + 2 > 0$

EX. 3 ① Trouver le domaine de déf des fcts suivantes :

1° $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2 - 1}$; 2° $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x - 2}$

② Calculer $f'(x)$ dans chaque cas :

1°/ $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$. 2°/ $f(x) = e^{\sin(3x)}$

3°/ $f(x) = \ln(x^2 + 1)e^{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x}$

EX. 4 Calculer les limites :

1°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ 2°/ $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (x - e^{-x})$

3°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 2x^2 - x)$ 4°/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x+1} - e}{2x}$

EX. 5 f définie sur $[-3;0]$ par :

$f(x) = 1 - xe^x$

1°/ Donner le tableau de variation de la fonction f sur $[-3;0]$

2°/ Construir la courbe $(\mathcal{C}_f)$

Devoir maison : n°1 2ème semestre

à rendre le vendredi 06/03/2020

EX. 1 $f(x) = e^x - 2x$

1°/ Calculer $f(0)$; $f(1)$ et $f(2)$ sachant que : $e \simeq 2,7$ et $e^2 \simeq 7,4$

2°/ Calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f.

3°/ Donner l'équation des deux tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses : $x = \ln(2)$ et $x = 0$

4°/ Construir $(\mathcal{C}_f)$

EX. 2 Résoudre les équations différentielles :

1°/ $y' + 4y = 0$

2°/ $y'' + 4y' + 4 = 0$

3°/ $y'' + y' + y = 0$

EX. 3

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2) On considère les trois points : A, B et C avec : $z_A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$z_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i1}{2}$ et $z_C = \overline{z_B}$

2-a) écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.

2-b) Montrer que : $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

3) Vérifier que : $\dfrac{z_B}{z_C} = e^{i\pi/3}$

4) Déterminer la nature du triangle OBC.

Bon courage !